Вељко Ћировић

МАТЕМАТИКА
РЕШЕНИ ЗАДАЦИ ЗА V РАЗРЕД

припреме за такмичења

100 ЗАДАТАКА

WWW.MATEMATICKIFORUM.COM
Ваљево, 2015.

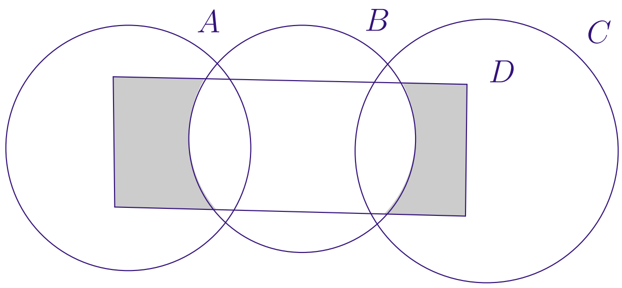
Садржај

1 Скупови

1. Нека је P скуп свих парних природних бројева, а L скуп свих непарних природних бројева. Одредити:
$P \cap L$, $P \cap \mathbb{N}$, $L \cap \mathbb{N}$, $P \cup \mathbb{N}_0$, $P \cap \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 7\}$, $(\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0) \setminus P$.

   Решење. $P \cap L = \emptyset$, $P \cap \mathbb{N} = P$, $L \cap \mathbb{N} = L$, $P \cup \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$,
$P \cap \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 7\} = \{8, 10, 12, \ldots\}$, $(\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0) \setminus P = L$. ♣

2. На слици је Венов дијаграм скупова A, B, C и D. Одредити који скуп представља осенчени део овог дијаграма?



   Решење. Пошто је осенчени скуп састављен из два раздвојена дела представићемо га као унију ова два скупа.

$$((A \cap D) \setminus B) \cup ((C \cap D) \setminus B)$$

   Напоменимо да ово није једини начин да се осенчени скуп коректно представи. ♣

3. Одредити природан број x, тако да буде $A \subset (B \cup C)$ и да је $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$ и $C = \{2, 5, 6\}$.

   Решење. Како је $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ то може бити $x = 4$, $x = 5$ или $x = 6$. ♣

4. Колики је збир свих елемената скупа $A = \{x | x \in N_0 \text{ и } 5 < x + 3 \leq 13\}$?

   Решење. Овде је важно тачно одредити тачно елементе датог скупа. Имаћемо

$$A = \{x | x \in N_0 \text{ и } 5 < x + 3 \leq 13\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

   Остатак је једноставан - збир свих елемената је $4 \cdot 13 = 52$.♣

5. Одредити скупове A и B ако је $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 6\}$ и $A \cap B = \{2\}$, а затим одреди елементе партитивног скупа $\mathcal{P}(A)$.

Решење. Скупови су $A = \{1,2,3,6\}$ и $B = \{2,4,5\}$. Партитивни скуп је:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3,6\},$$

$$\{1,2,3\}, \{1,2,6\}, \{1,3,6\}, \{2,3,6\}, A\} \clubsuit$$

6. Да ли вредност израза

$$(20132013 : 33) : 61 - 20132013 : 2013 + 20132013 : 671$$

припада скупу $A = \{a \mid a \in \mathbb{N}\ u\ 5666 < a < 6555\}$?

Решење. Вредност овог израза је 30003. Па, она не припада овом скупу. ♣

7. Скуп A чине сви прости делиоци броја 2860. А скуп B чине бројеви који су једнаки производу тачно два елемента из скупа А. Одредити скуп B.

Решење. Растављајући број 2860 на производ простих чинилаца добијамо: $2860 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Дакле,

$$A = \{2, 5, 11, 13\}.$$

Производи по два елемента из скупа А су: $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 11 = 22$, $2 \cdot 13 = 26$, $5 \cdot 11 = 55$, $5 \cdot 13 = 65$, $11 \cdot 13 = 143$. Дакле, ових бројева је тачно 6 и они чине скуп $B = \{10, 22, 26, 55, 65, 143\}$. ♣

8. Дат је скуп $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Да ли постоје скупови A и B, такви да је $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = M$ и збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B?

Решење. Овакви скупови не постоје јер је збир свих елемената скупа M непаран број, па се не може поделити на два једнака дела. ♣

9. Скуп A има 2013 елемената, скуп B 2014, а њихова унија 2015 елемената. Колико елемената је у њиховом пресеку?

Решење. У њиховом пресеку је 2012 елемента. ♣

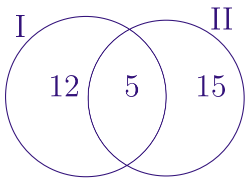
10. Одредити елементе скупова A и B ако је

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}, A \cap B = \{x | x \in N\ u\ 3 \leq x < 6\}, A \setminus B = \{1,6\}$$

Решење. Ови скупови су $A = \{1,3,4,5,6\}$ и $B = \{2,3,4,5,7\}$. ♣

11. У једној школи последњег наставног дана 17 наставника је радило у преподневној смени, 20 у послеподневној, а 5 у обе смене. Тог дана су 3 наставника била на боловању. Колико наставника ради у тој школи? (*Школско такмичење 2008.*)

Решење. У тој школи ради 35 наставника. ♣



Боловање 3

12. Скупови A и B имају исти број елемената. Ако је $A \cup B = \{x | x \in N \ u \ x < 18\}$, а $A \cap B = \{1, 2, 7, 13, 17\}$ одредити скупове A и B знајући да је сваки елемент скупа $A \setminus B$ већи од сваког елемента скупа $B \setminus A$. (*Школско такмичење 2007.*)

Решење. Ови скупови су $A = \{1, 2, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17\}$ ♣

13. Дат је скуп $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Којих подскупова скупа A има више, оних са 2 или оних са 3 елемента? (*Школско такмичење 2014.*)

Решење. Има их исто. Ако уочимо било који двоелементни подскуп, њему одговара тачно један троелементни подскуп са којим у унији даје цео скуп. ♣

14. Одредити све скупове X који задовољавају услове

$$X \subset \{a, b, c, d, e\} \quad u \quad X \cap \{a, c, d\} = \{a, d\}$$

(*Школско такмичење 2004.*)

Решење. Постоје четири различита скупа који задовољавају услове: $X_1 = \{a, d\}$, $X_2 = \{a, d, e\}$, $X_3 = \{a, b, d\}$, $X_4 = \{a, b, d, e\}$. ♣

15. Нека је M скуп слова која чине реч МАТЕМАТИКА, а T скуп слова која чине реч ТАКМИЧЕЊЕ. Колико двочланих подскупова има пресек скупова M и T?

Решење. Пресек скупова M и T има 5 елемената. У њему се може уочити 15 различитих двоелементних подскупова. ♣

16. Скуп A чине сви прости делиоци броја 2860. А скуп B чине бројеви који су једнаки производу тачно два елемента из скупа А. Одредити скуп B.

Решење. Раставићемо број 2860 на производ простих чинилаца, и тако добијамо:

$$2860 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$$

Дакле, одавде можемо одговорити какав је скуп A:

$$A = \{2, 5, 11, 13\}$$

Производи по два елемента из скупа A су: $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 11 = 22$, $2 \cdot 13 = 26$, $5 \cdot 11 = 55$, $5 \cdot 13 = 65$, $11 \cdot 13 = 143$. Па, бројећи их закључујемо да је ових бројева тачно 6 и они чине тражени скуп

$$B = \{10, 22, 26, 55, 65, 143\} \clubsuit$$

2 Бројеви

1. Од цифара 3, 4, 5, 8 написати све троцифрене бројеве, чије се цифре међусобно разликују, а који су дељиви са 3.

   Решење. Пошто тражени бројеви морају имати збир цифара дељив са 3, то ћемо узети бројеве састављене од цифара:

   1° 3, 4 и 5 (збир цифара је 12)
   2° 3, 4 и 8 (збир цифара је 15)

   Па су тражени бројеви:

   $$345, 354, 435, 453, 534, 543, 348, 384, 438, 483, 834, 843.$$

   Дакле, таквих бројева има 12, и они задовољавају услове задатка. ♠

2. Додати по једну цифру испред и иза броја 2011 тако да се добије најмањи шестоцифрен број који је дељив са 18.

   Решење. Број ће бити дељив са 18 ако је дељив са 2 и са 9 истовреме-но. Па то управо значи да нам тражени број мора бити дељив са тим бројевима, односно бити паран, односно завршавати се на неки паран број, и имати збир цифара дељив са 9. Нека је тражени број састављен из следећих цифара

   $$\overline{x2011y}$$

   , овде y треба бити паран, а x ћемо одабрати по услову да збир цифара

   $$x + 2 + 0 + 1 + 1 + y$$

   буде дељив са 9. Пошто нам се, уз ове услове, тражи и да добијени број буде најмањи такав, то пробајмо да ли је могуће да $x = 1$? Ако је $x = 1$ збир првих пет цифара овог броја је 5, па нам за $y = 4$ то све заједно даје и коначно решење овог задатка. Дакле, број 120114 је најмањи број који је дељив са 18 и који задовољава оно што је тражено у задатку. ♠

3. Производ неких простих бројева је број 32048. Који број се добија када се ти прости бројеви саберу?

   Решење. Пошто се сваки сложени број може представити као производ простих, то ћемо за почетак и број 32048 раставимо на такав производ простих чинилаца:

   $$32048 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2003$$

   Бројеви 2, 2, 2, 2 и 2003 су сви прости, а њихов збир је 2011. ♠

4. На Јордановом рођендану било је 43 дечака и 32 девојчице. Да ли је могуће да је сваки Јорданов гост срео међу осталим гостима тачно једанаесторо познаника из школе?

   Решење. На рођендану је било $43 + 32 = 75$ гостију. Ако сваки гост познаје по једанаесторо других гостију то би било укупно познанстава:

$$(75 \cdot 11) : 2$$

   а ово није цео број! Па закључујемо да није могуће да ја сваки Јорданов срео по једанаест познаника!

   Напомена. У Изразу $(75 \cdot 11) : 2$ делимо са 2 зато што желимо да свако познанство између особа А и Б рачунамо само једном, иако у простом набрајању то познанство може бити препознато и као А-Б и Б-А, али пошто се ради о истим особама, онда је то једно једино познанство. Ово се често јавља у задацима сличног типа, па треба пажљиво уочити. ♠

5. При дељењу непознатог броја са 56 остатак је 35. Да ли је дати број дељив са 7?

   Решење. Нека је тражени непознати број x. Читамо задатак и записујемо:

$$x : 56 = q(35)$$

   где је q количник у овом дељењу. Присећамо се да последњи израз можемо записати и као

$$x = 56 \cdot q + 35$$

   А пошто су бројеви 56 и 35 дељиви са 7, то је са 7 дељив и збир $56 \cdot q + 35$, па је одговор на питање нашег задатка: Да! ♠

6. Одредити најмањи и највећи петоцифрени број који је дељив са 2010.

   Решење. Као што радимо често у оваквим задацима, у којима је дељивост у питању, представимо број 2010 као производ простих:

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

   Да би добили најмањи петоцифрен број који је дељив са 2010, помножимо га са 5, и у резултату добијамо

$$2010 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 5 = 10050$$

   Зашто нисмо помножили са 4? Па зато што би било: $2010 \cdot 4 = 8040$ а ово није петоцифрен број. Побринимо се сада око највећег петоцифреног. Може се на више начина доћи до тог решења, а једна од идеја је рецимо да нађемо најмањи шестоцифрени дељив са 2010, па да од њега одузмемо 2010 и то би био тражени највећи петоцифрени број. Мало истражујемо па видимо да је:

$$10 \cdot 10050 = 10 \cdot 5 \cdot 2010 = 100500$$

и ово је очигледно најмањи шестоцифрен број дељив са 2010. Одавде лако, највећи тражени петоцифрени број биће: $100500 - 2010 = 98490$. Проверавамо: $98490 : 2010 = 47$. ♠

7. Да ли је могуће само помоћу канти од 5 и 7 литара напунити водом канту која прима 4 литра?

   Решење. Овај задатак је прилично једноставан, али служи да поред налажења конкретног решења, упути и на повезивање ове приче са укључивањем неке основне логике у решавање задатака. Поступак је следећи. Напунимо канту од 7 литара, па из ње узмемо 5 литара другом кантом, тако нам остане 2 литра и то сипамо у канту од 4 литра. Поновимо претходни поступак још једном и посао је завршен! У овом понављању, воду из канте од 5 литара нећемо просипати већ је вратимо у канту од 7 литара, њу допунимо до краја и опет одлијемо 5. Дакле, могуће је. ♠

8. Пет крава за десет дана попасе ливаду од 50 ари, колику ливаду ће попасти 50 крава за 50 дана?

   Решење. У оваквим задацима потребно је из датих података извући закључак шта се дешава за један дан, а онда то искористити за тражење решења. Како 5 крава за 10 дана попасе ливаду од 50 ари, то се из датог да закључити да тих 5 крава за 1 дан попасе 5 (50 : 10) ари. А одатле ћемо имати да 50 крава (10 пута више) за један дан попасе 50 ари (10 пута више), и то значи да ће за 50 дана попасти ливаду од

   $$50 \cdot 50 = 2500$$

   ари, тј. 25 хектара! Уколико је однос између једница за површину заборављен, време је да се обнови!♠

9. Одредити најмањи природан број чији је збир цифара 100.

   Решење. Овде нам се намеће да тражимо број који ће имати што више цифара 9 и због услова да буде најамњи, морао би почети цифром 1. Лако закључујемо да треба да их има једанаест, а на првом месту стављамо управо цифру 1, па је тражени број 199 999 999 999. ♠

10. Одредити све просте троцифрене бројеве којима је производ цифара једнак 70.

    Решење. Само број 257 је такав. ♠

11. Бројеве $1, 2, 3, \ldots, 31, 32.$ подели у четири групе од по осам бројева, тако да збирови бројева у овим групама буду једнаки.

Решење. Једно решење је:

$$\{1, 8, 9, 16, 17, 24, 25, 32\}, \{2, 7, 10, 15, 18, 23, 26, 31\},$$

$$\{3, 6, 11, 14, 19, 22, 27, 30\}, \{4, 5, 12, 13, 20, 21, 28, 29\}. \spadesuit$$

12. На једном семафору зелено светло се пали на сваких 60 секунди, а на другом на сваких 45 секунди. Ако је познато да је у 10 часова на оба семафора истовремено упаљено зелено светло, одредите у које време ће се следећи пут опет упалити зелена светла истовремено на ова два семафора. Да ли ће у 12 сати и 3 минута бити упаљено зелено светло на оба семафора?

Решење. Знамо да је $\text{НЗС}(45, 60) = 180$, па ће се зелено светло наредни пут истовремено упалити у 10 часова и 3 минута. Пошто се истовремено паљење зеленог светла на ова два семафора дешава на сваких 3 минута, то ће се оно сигурно дешавати и на сваки пун сат (60 дељиво са 3) , а отуда добијамо да ће бити истовремено упаљено и у 12 сати и 3 минута. $\spadesuit$

13. Разлика два броја је 82. Ако већи од њих повећамо 3 пута, а мањи остане исти, нова разлика је 426. Који су бројеви у питању?

Решење. Означимо мањи од бројева са x. Тада је већи од њих $x + 82$. Сада можемо саставити једначину. Три пута увећавамо већи број, и од тога одузимамо мањи, то јест:

$$3 \cdot (x + 82) - x = 426$$

Једноставним решавањем једначине долазимо до тражених бројева: 90 и 172. $\spadesuit$

14. Ако запишемо све природне бројеве у низ набрајајући цифре једну до друге редом:

$$1234567891011121314151617181920212223242526...$$

која ће цифра бити на месту 2012?

Решење. Да би се написали сви једноцифрени бројеви, потребно је

$$9 \cdot 1 = 9$$

цифара. Да би се написали сви двоцифрени бројеви потребно је

$$90 \cdot 2 = 180$$

цифара, а да би се написало 900 троцифрених бројева потребно је

$$900 \cdot 3 = 2700$$

цифара. Па, за запис свих једноцифрених, двоцифрених и троциф-рених бројева "потрошићемо" $9 + 180 + 2700 = 2889$ цифара. Дакле, закључујемо да је наша тражена цифра део неког од троцифрених бројева! То је први битан податак. Сада имамо да је

$$2012 - 189 = 1823.$$

Ово значи да је наша тражена цифра на 1823. месту цифара које припадају неком од троцифрених бројева (јер 189 цифара је искори-шћено за запис свих једноцифрених и двоцифрених бројева). Пођимо сада од овога:

$$1823 : 3 = 607(2).$$

Па је наша тражена цифра друга цифра у 608. троцифреном броју. А 608. троцифрени број је 707. (осми број шесте стотине троцифре-них бројева). Његова друга цифра је 0, што је и требало наћи. ♠

15. Доказати да је производ збира и разлике два узастопна непарна природна броја дељив са осам.

Решење. Овде је важно уочити да се два узастопна непарна природна броја: могу представити као:

$$n + 1, \quad u \quad n + 3,$$

где је $n \in N$ паран природан број. Њихов збир је:

$$n + 1 + n + 3 = 2n + 4$$

а разлика је

$$n + 3 - n - 1 = 2.$$

Тражени производ је:

$$(2n + 4) \cdot 2.$$

Проанализирајмо га. Заиста, овај број је дељив са осам, јер је очигледно дељив са 2, а број $2n + 4$ је дељив са 4, због парности броја n. И то је довољно за доказ овог тврђења. ♠

16. Множењем два двоцифрена броја добија се број који садржи само цифре 5. Одредити све парове таквих бројева.

Решење. Два двоцифрена броја када се помноже могу се добити бројеви између 100 и 9801, зато што је $10 \cdot 10 = 100$ и $99 \cdot 99 = 9801$. Сада нам преостаје једини да видимо могу ли два двоцифрена броја у производу дати 5555 или 555. Разложимо ове бројеве, и доћи ћемо до решења. $5555 = 5 \cdot 1111 = 5 \cdot 11 \cdot 101$. С обзиром да је 101 прост број, то се 5555 не може добити као производ два двоцифрена броја! Остаје нам да проучимо број 555. Овде имамо: $555 = 5 \cdot 3 \cdot 37 = 15 \cdot 37$. Ово нам је довољно да изведемо следећи закључак. Једино решење нашег задатка је пар двоцифрених бројева: 15 и 37, јер је њихов производ 555. ♠

17. Ако су p и $7p-1$ прости бројеви онда је $7p+1$ сложен број. Доказати.

Решење. Нека је $p=2$, тада је $7p-1=7\cdot 2-1=13$ такође прост број. А број $7p+1=7\cdot 2+1=15$ је сложен, што је и требало показати. Нека је сада p прост број већи или једнак 3, он је онда и непаран па је број $7p-1$ паран. Овде завршавамо анализу проблема јер смо утврдили да тврђење важи за $p=2$.♠

18. Постоји ли прост број p тако да и бројеви $3p+1$ и $5p+1$ буду прости?

Решење. Постоји. То је број $p=2$, јер су тада $3\cdot 2+1=7$ и $5\cdot 2+1=11$ прости. Више од овог не би било могуће јер би за било који други прост број $p\geq 3$, због његове непарности, бројеви $3p+1$ и $5p+1$ били парни па тиме и сложени. ♠

19. Одредити све просте бројеве p за које је и број 3^p+p^3 прост.

Решење. За $p=2$ је и $3^2+2^3=17$ прост, а за друге просте бројеве p, који су уз то и непарни, збир 3^p+p^3 је збир два непарна броја, па је он паран, а тиме и сложен. Дакле, број 3^p+p^3 је прост једино за $p=2$. ♠

20. Дешифруј множење $\overline{\star 4\star}\cdot 15=\overline{3\star 9\star}$. (*Школско такмичење 1994.*)

Решење. $246\cdot 15=3690$. ♠

21. Акваријум је у облику квадра димензија $60cm$, $60cm$ и $40cm$ и напуњен је водом до врха. Колико пута се мора употребити посуда запремине од једног литра да би се испразнила трећина воде из акваријума?

Решење. Запремина овог акваријума је:

$$60\cdot 60\cdot 40=144000\ cm^3$$

С обзиром да 1 dm^3 има $10\cdot 10\cdot 10=1000\ cm^3$ то добијамо да је $144000\ cm^3=144\ dm^3=144$ литра, јер 1 dm^3 одговара запремини од једног литра воде. А трећина воде у акваријуму ће бити: $144:3=48$ литара, па посуду треба употребити 48 пута. ♠

22. Аритметичка средина осам различитих природних бројева је 16. Колики може бити највећи од тих бројева?

Решење. Аритметичка средина бројева a и b је број $\dfrac{a+b}{2}$. Па за осам бројева ћемо слично имати. За почетак означимо те бројеве, рецимо, са

$$n_1,n_2,...,n_8\in\mathbb{N}$$

и претпоставимо да смо их поређали од најмањег до највећег.

Сада ће њихова аритметичка средина бити:

$$\frac{n_1 + n_2 + ... + n_8}{8} = 16$$

па одавде добијамо да је збир тих нама непознатих бројева једнак $n_1 + n_2 + ... + n_8 = 8 \cdot 16 = 126$. Па да би последњи број, то је наш n_8 био највећи могући, потребно је да збир преосталих 7 буде најмањи могући. А то ће се постићи када су првих седам одабраних бројева управо бројеви од 1 до 7. А њихов збир је

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

па највећи одабрани број може да буде $126 - 28 = 98$. ♠

23. Дешифровати сабирање $\overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{CBBC} = \overline{BCDC}$, ако једнаким словима одговарају једнаке, а резличитим словима различите цифре. (*Окружно такмичење 1996.*)

Решење. $85 + 855 + 4554 = 5494$. ♠

24. На тренингу је било 225 дечака и 105 лопти. Они су подењени на једнаке групе тако да је свака група добила исти број лопти. Колико је било група и колико је свака група добила лопти? Колико решења има дати проблем? (*Школско такмичење 1997.*)

Решење. Пошто је $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, постоји три различита решења:

1) 3 групе по 75 дечака и по 35 лопти;

2) 5 група по 45 дечака и по 21 лопта;

3) 15 група по 15 дечака и по 7 лопти. ♠

25. Одредити најмањи природни број дељив са 36, а који је записан само цифрама 4 и 7. (*Окружно такмичење 1996.*)

Решење. Тај број мора бити дељив са 4 и са 9. Због дељивости са 4 мора се завршавати цифрама 44, а због дељивости са 9 збир цифара му мора бити дељив са 9. Најмањи такав је 444744. ♠

26. Одреди највећи природни број који при дељењу са 14 даје исти количник и остатак.

Решење. Највећи остатак при дељењу са 14 може бити 13. Па да би количник и остатак били исти добијамо да је тражени број једнак $x = 14 \cdot 13 + 13 = 195$, јер је $195 : 14 = 13(13)$. ♠

3 Разломци

1. Два радника раде један посао, и то први радник је за осам сати урадио $\dfrac{16}{29}$ посла, а други за четири сата $\dfrac{8}{27}$ посла. Који од њих двојице је ефикаснији?

   Решење. Ако би други радник наставио овим темпом, он би за осам сати урадио $2 \cdot \dfrac{8}{27} = \dfrac{16}{27}$. А пошто је
$$\frac{16}{27} > \frac{16}{29}$$
   то закључујемо да је други радник нешто ефикаснији. ♠

2. Поређати по величини следеће разломке $\dfrac{1}{51}, \dfrac{10}{503}, \dfrac{40}{2011}$.

   Решење. Приметимо да нам овде решење доносе следећа проширења одговарајућих разломака:
$$\frac{1}{51} = \frac{40 \cdot 1}{40 \cdot 51} = \frac{40}{2040}, \frac{10}{503} = \frac{4 \cdot 10}{4 \cdot 503} = \frac{40}{2012}.$$
   Па сада треба упоредити:
$$\frac{40}{2040}, \frac{40}{2012}, \frac{40}{2011}.$$
   А пошто су нам бројиоци једнаки, то је редослед разломака следећи:
$$\frac{40}{2040} < \frac{40}{2012} < \frac{40}{2011}. ♠$$

3. Бројилац и именилац разломка $\dfrac{p}{q}$ су прости бројеви. Одредити просте бројеве p и q, ако је збир разломка $\frac{p}{q}$ и њему реципрочног разломка једнак $\dfrac{130}{33}$.

   Решење. Разломак реципрочан разломку $\dfrac{p}{q}$ је $\dfrac{q}{p}$. Услов задатка даје
$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{130}{33},$$
   а ово значи да је НЗС$(p, q) = 33 = 3 \cdot 11$, и отуда добијамо да је $p = 3$ и $q = 11$, или $p = 11$ и $q = 3$, што и провером можемо потврдити
$$\frac{3}{11} + \frac{11}{3} = \frac{11}{3} + \frac{3}{11} = \frac{130}{33}.$$
   па је ово потврда да смо нашли права решења. ♠

4. Колико има разломака једнаких $\frac{1}{3}$, чији бројилац и именилац су природни бројеви, а чији је именилац мањи од 55?

Решење. Једнаки ће бити сви они разломци који када се скрате дају $\frac{1}{3}$. Нпр. $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$,... А да би био испуњен услов да именилац буде мањи од 55, то значи да ћемо узети оне разломке чији имениоци су бројеви дељиви са три, и мањи од 55. Природних бројева који су дељиви са 3 а мањи од 55 има 18, искључимо ли тројку која је већ "урачуната" у разломак $\frac{1}{3}$, добијамо да је тражено решење 17. ♠

5. Ученик је првог дана читања књиге прешао $\frac{1}{5}$ страна, другога дана $\frac{3}{8}$ остатка, а трећег и четвртог дана по 60 страна. Колико страна има ова књига?

Решење. **Први начин.** Првог дана ученик је прочитао $\frac{1}{5}$, а другог дана $\frac{3}{8}$ од преосталих $\frac{4}{5}$ страна књиге. То значи да је другог дана прочитао $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$ страна књиге. Па једноставно закључујемо да је у току прва два дана прочитао

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- тачно половину књиге. А пошто нам је познато да је остало још $2 \cdot 60 = 120$ страна које је прочитао у наредна два дана, то закључујемо да књига има 240 страна.

Други начин. Пошто нам је број страна непознат, претпоставимо да књига има x страна. Првог дана је прочитао $\frac{1}{5}x$, другог

$$\frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{5}x\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{12}{40}x = \frac{3}{10}x$$

а трећег и четвртог по 60 страна. Саберимо то и запишимо у једначину:

$$\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}x + 60 + 60 = x$$

Одавде је: $\frac{2}{10}x + \frac{3}{10}x + 120 = x$, тј. $\frac{5}{10}x + 120 = x$ односно $\frac{1}{2}x + 120 = x$. И лако добијамо $\frac{1}{2}x = 120$ тј. $x = 240$. ♠

6. Акваријум је у облику квадра димензија $60cm$, $60cm$ и $40cm$ и напуњен је водом до врха. Колико пута се мора употребити посуда запремине од једног литра да би се испразниле $\frac{2}{3}$ воде из акваријума?

Решење. Запремина акваријума је $60 \cdot 60 \cdot 40 = 144000cm^3 = 144dm^3 = 144$ литара. А трећина воде у њему је $144 : 3 = 48$ литара, па посуду треба употребити $2 \cdot 48 = 96$ пута. ♠

7. Бошко и Сава су заједно имали 80 динара. Бошко за $\frac{2}{7}$ свог новца купио часопис, а Сава је за $\frac{4}{9}$ свог новца купио слаткише. Колико новца је имао свако од њих пре куповине, ако су им после куповине остале једнаке суме новца? *(Општинско такмичење 1997.)*

Решење. Одмах можемо да закључимо да је Бошку остало $\frac{5}{7}$ новца који је имао пре почетка куповине, а Сави $\frac{5}{9}$ новца које је имао. Али пошто је $\frac{5}{7}$ Бошковог новца једнако са $\frac{5}{9}$ Савиног новца, то једноставно закључујемо да је $\frac{1}{7}$ Бошковог новца једнака $\frac{1}{9}$ Савиног новца. Па се бошкова сума новца односи према Савиној суми новца као $7 : 9$. Поделићемо 80 динара на 16 делова $(80 : 16 = 5)$ и видети да је 7 таквих делова припадало Бошку, а 9 Сави. То јест, 35 динара је имао Бошко, а 45 Сава.♠

8. Одредити све просте бројеве p такве да је $\frac{7}{6} > \frac{5}{p} > \frac{2}{5}$.

Решење. Из датог односа међу разломцима $\frac{7}{6} > \frac{5}{p} > \frac{2}{5}$ следи да је и

$$\frac{5}{2} > \frac{p}{5} > \frac{6}{7}$$

А сада, да би олакшали посао приликом поређења, проширимо дате разломке да их доведемо на исте имениоце. Закључујемо да је одговарајући исти именилац 70. Па ћемо имати:

$$\frac{175}{70} > \frac{14p}{70} > \frac{60}{70}$$

Односно, $175 > 14p > 60$. Одавде је: $\frac{175}{14} > p > \frac{60}{14}$. Па, једноставно добијамо да је $p \in \{5, 7, 11\}$. ♠

9. Одредити природан број n такав да је $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{7}{n} = 1$ *(Општинско такмичење 2012.)*

Решење. Из $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{7}{n} = 1$ је $\frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} + \frac{7}{n} = \frac{19}{20} + \frac{7}{n} = 1$. А одавде је $\frac{7}{n} = \frac{1}{20}$, односно $n = 140$. ♠

4 Основни геометријски објекти

1. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Одреди углове α, β и γ, ако је угао α пет пута већи од угла:
а) β; б) γ. *(Школско такмичење 2012.)*

Решење. Услови задатка кажу да је $\alpha+\beta=180^\circ$ и $\beta+\gamma=90^\circ$.

(а) С обзиром да је $\alpha=5\cdot\beta$ имаћемо: $5\cdot\beta+\beta=6\cdot\beta=180^\circ$ и одатле је $\beta=30^\circ$ и $\alpha=150^\circ$. А због $\beta+\gamma=90^\circ$ је $\gamma=90^\circ-\beta=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

(б) С обзиром да је $\alpha=5\cdot\gamma$ имаћемо: $5\cdot\gamma+\beta=180^\circ$ и $\beta+\gamma=90^\circ$. А одавде је $4\cdot\gamma=90^\circ$, односно $\gamma=22^\circ30'$. Лако се добија да је $\beta=67^\circ30'$ и $\alpha=112^\circ30'$. ♣

2. Тачке A, B и C су на једној, а D и E на другој од две паралелне праве. Наброј све дужи и све троуглове које одређују тих пет тачака. *(Школско такмичење 2012.)*

Решење. Одређене су следеће дужи:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,\ BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE$$

и следећи троуглови:

$$\triangle ABE,\ \triangle ABD,\ \triangle ACE,\ \triangle ACD,$$

$$\triangle BCE,\ \triangle BCD,\ \triangle EDA,\ \triangle EDB,\ \triangle EDC$$

Дакле, 10 дужи и 9 троуглова. ♣

3. Који угао је суплементан са својом осмином? *(Школско такмичење 2011.)*

Решење. Обележимо непознати угао са α, а са β њему суплементан угао. Пошто је α суплементан са својом осмином то значи да је он од тог угла већи 8 пута, тј. $\alpha=8\cdot\beta$ и $\alpha+\beta=180^\circ$. Одавде је $9\cdot\beta=180^\circ$, односно $\beta=20^\circ$, а $\alpha=160^\circ$. ♣

4. Угао α је за 32° већи од своје трећине. Одреди угао комплементан углу α. *(Школско такмичење 2009.)*

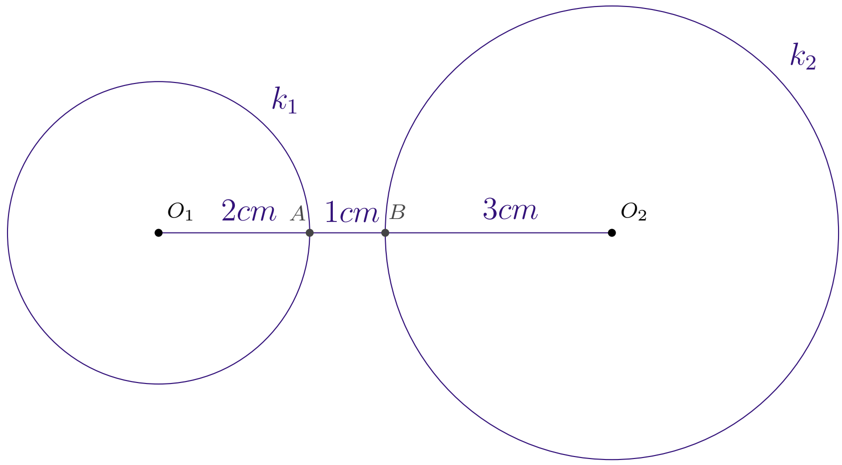
Решење. Пошто је угао α већи од своје трећина за 32°, његове две трећине су управо толико а једна његова трећина је 16° и он је $\alpha=48^\circ$. Па је њему комплементан угао $\beta=90^\circ-48^\circ=42^\circ$. ♣

5. Углови α и β су комплементни. Одреди углове α и β ако је њихова разлика једнака трећини већег угла. *(Школско такмичење 2008.)*

Решење. Нека је, на пример, $\alpha > \beta$ и $\alpha + \beta = 90°$. Пошто је $\alpha - \beta$ једнако трећини од α, то је угао β једнак са $\frac{2}{3}$ од α, односно $\frac{5}{3}\alpha = 90°$. Одавде је $\alpha = 54°$ и $\beta = 36°$. ♣

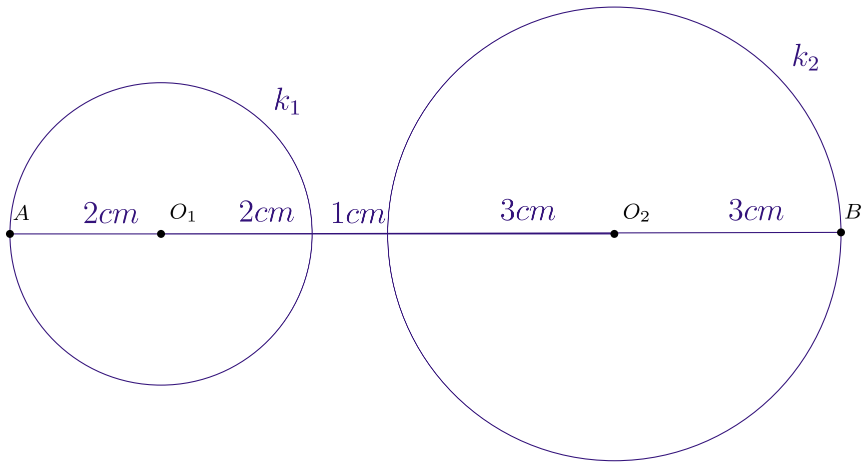
6. Нацртај кружне линије $k_1(O_1,\ 2\ cm)$ и $k_2(O_2,\ 3\ cm)$ ако је $O_1O_2 = 6\ cm$. Одреди тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тако да је дуж AB
(а) најкраћа; (б) најдужа.
Колика је тада дужина дужи AB? *(Школско такмичење 2004.)*

Решење. Тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тражићемо на правој која је одређена центрима O_1 и O_2.
(а)



У овом случају је $AB = 1\ cm$.

(б)



У овом случају је $AB = 11\ cm$. ♣

7. Израчунај меру угла који је за $2004'$ већи од њему комплементног угла. *(Школско такмичење 2004.)*

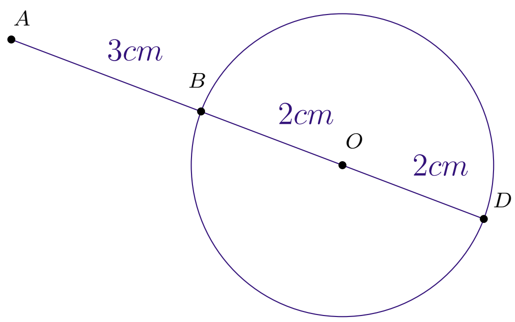
   Решење. Нека је угао α већи од свог комплемента за $2004'$, то ћемо записати $\alpha + \overbrace{\alpha - 2004'} = 90^\circ$, где је $\alpha - 2004'$ његов комплемент. Пошто је $2004' = 33^\circ 24'$ одавде је $2\alpha = 90^\circ + 33^\circ 24' = 123^\circ 24'$ односно $\alpha = 61^\circ 42'$. ♣

8. Дужине страница правоугаоника, мерене у центиметрима, изражавају се природним бројеви-ма. Површина правоугаоника је $24\ cm^2$. Колико таквих неподударних правоугаоника постоји? *(Школско такмичење 2003.)*

   Решење. Површина правоугаоника израчунава се по обрасцу $P = a \cdot b$, где су a и b дужине његових страница. Идеја је представити број 24 као производ природних бројева, а који ће бити дужине страница. Лако долазимо до закључка да таквих правоугаоника има четири. То су правоугаоници чије су дужине страница $1\ cm$ и $24\ cm$, $2\ cm$ и $12\ cm$, $3\ cm$ и $8\ cm$, $4\ cm$ и $6\ cm$. ♣

9. Најкраће растојање тачке A од датог круга K је $3\ cm$, а растојање тачке A од центра круга је $5\ cm$. Колико је највеће растојање тачке A од датог круга K? *(Школско такмичење 1998.)*

   Решење. Посматрајмо следећу слику.



   Одговарајућа растојања од круга се мере на правој која садржи дату тачку и центар круга. Па једноставно видимо да је то тражено највеће одстојање једнако дужини дужи $AD = 7\ cm$. ♣

10. Збир угла комплементног датом углу α и угла суплементног датом углу α једнак је четворос-труком углу α. Колики је угао α? *(Школско такмичење 1997.)*

    Решење. Нека је угао β комплементан углу α и нека је угао γ суплементан углу α.

То значи да је $\alpha + \beta = 90°$ и $\alpha + \gamma = 180°$. А ми знамо да је, по условима задатка, $\beta + \gamma = 4 \cdot \alpha$, то јест

$$90° - \alpha + 180° - \alpha = 4 \cdot \alpha$$

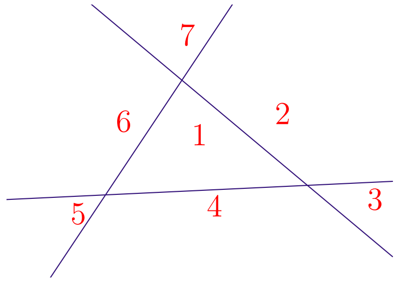
Одавде је $270° = 6 \cdot \alpha$ и $\alpha = 45°$. ♣

11. Запремина коцке је 1728 cm^3. Одредити њену површину. *(Школско такмичење 1996.)*

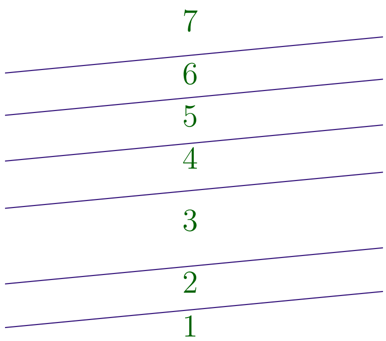
Решење. Запремина коцке, ивице a, једнака $V = a^3$, а нас занима колика је ивица коцке којој је запремина 1728 cm^3. Раставимо број 1728 на просте чиниоце, и добијамо $1728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Одавде је $1728 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^3 = 12^3$. Површина ове коцке ће бити $P = 6 \cdot 12^2 = 6 \cdot 144 = 864$. ♣

12. Колико најмање, а колико највише треба конструисати правих у равни, да би оне раван поделиле на 7 области? *(Школско такмичење 1996.)*

Решење. На сликама које следе приказани су примери одговарајућих решења. Било које три праве које, међу којима нема паралелних одређују 7 области у равни, и то је тражени најмањи број правих.



За највећи могући број правих које одређују 7 области у равни дошли смо до њих тачно шест, и то узимајући паралелне праве.



13. Колики угао заклапају на часовнику сатна и минутна казаљка у 8 сати и 20 минута?

Решење. Минутна казаљка за један сат направи пун круг, то јест направи угао од 360^o, па за један минут пређе $\frac{1}{60}$ круга, а то је угао од 6^o. Сатна иде много спорије, и за један минут пређе $\frac{1}{60}$ оног дела круга који иначе пређе за један сат, а то је

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360^o = 30'.$$

Па, пошто сада знамо колико прелазе обе казаљке за које време, можемо прећи на рачун. За 20 минута минутна казаљка пређе $20 \cdot 6^o = 120^o$, док мала за 8 сати и 20 минута пређе $8 \cdot 30^o + 20 \cdot 30' = 250^o$, и отуда добијамо да казаљке у 8 сати и 20 минута заклапају огао од $250 - 120 = 130^o$. Ово смо добили тако што смо израчунали колики је угао прешла сатна казаљка од 12 сати до траженог времена, и колики је прешла минутна од 12 сати до истог тог времена, и онда просто те од првог угла одузели вредност другог, иначе ти углови се и преклапају на једном делу, па је решење онај угао који представља разлику. ♣

14. За два комплементна угла α и β познато је да је један од њих 8 пута већи од другог. Колики је, онда, угао γ који је суплементан већем од њих?

Решење. Дакле, $\alpha + \beta = 90^o$ и $\beta = 8 \cdot \alpha$, па када другу једнакост искористимо тако што је убацимо у прву, добићемо: $\alpha + \beta = \alpha + 8 \cdot \alpha = 9 \cdot \alpha = 90^o$, и отуда $\alpha = 10^o$. Због комплементности је $\beta = 90^o - 10^o = 80^o$. Па због суплементности већег од ових иглова и угла γ, имамо да је $\beta + \gamma = 180^o$, а одавде се добија $\gamma = 180^o - 80^o = 100^o$. ♣

15. Углови α и β су комплементни, а углови $2 \cdot \alpha$ и 40^o су суплементни. Одредити угао γ који је суплементан углу β.

Решење. Дакле, дато је $\alpha + \beta = 90^o$ и $2 \cdot \alpha + 40^o = 180^o$. Из ове друге једнакости добијамо $2 \cdot \alpha = 180^o - 40^o = 140^0$, то јест $\alpha = 70^o$. Сада, када ово убацимо у прву једначину, добијамо угао $\beta = 20^o$. Како су β и γ суплементни, то је $\beta + \gamma = 180^o$ односно $20^o + \gamma = 180^o$, а одавде добијамо $\gamma = 180^o - 20^o$, и коначно $\gamma = 160^o$. ♣

16. Угао α једнак је збиру свог комплементног угла и своје три четвртине. Који је то угао?

Решење. Запишимо ову релацију прецизније: $\alpha = (90^o - \alpha) + \frac{3}{4} \cdot \alpha$.
Одавде добијамо $\alpha + \alpha - \frac{3}{4} \cdot \alpha = 90^o$ и $2 \cdot \alpha - \frac{3}{4} \cdot \alpha = 90^o$, тј. $\frac{5}{4} \cdot \alpha = 90^o$.
Одавде следи да је $\alpha = 72^o$. ♣

17. Ако је познато да су углови α и β суплементни, а углови α и γ комплементни и угао β је пет пута већи од угла γ, одредити ове углове.

Решење. Запишимо прецизно податке који су нам дати: $\alpha + \beta = 180^o$, $\alpha + \gamma = 90^o$ и $\beta = 5 \cdot \gamma$. Ако искористимо трећу једнакост и уместо β убацимо у прву, добићемо: $\alpha + 5 \cdot \gamma = 180^o$, ово можемо разложити и записати као: $\alpha + \gamma + 4 \cdot \gamma = 180^o$, па користећи оно што је познато добићемо: $90^o + 4 \cdot \gamma = 180^o$. Ово значи да је: $4 \cdot \gamma = 90^o$ и одатле $\gamma = 22^o 30'$. Сада, једноставно користећи полазне једнакости, добијамо $\alpha = 90^o - 22^o 30' = 67^o 30'$ и $\beta = 180^o - 67^o 30' = 112^o 30'$ ♣

18. У равни су дате 3 различите кружнице и две различите праве. Колико највише пресечних тачака оне могу имати међусобно? Пре-сечна је тачка која је заједничка за две од ових фигура.

Решење. У оваквом задатку идеја нам је да направимо цртеж на коме ћемо покушати да "пресечемо" сваки објекат са сваким. Сваки круг се сече са сваким од по два остала и ту се добија 6 тражених тачака, сваку праву поставимо тако да сече сва три круга, и пошто их је две таквих тачака ће бити 2 пут по 6, тј 12. И још додамо 1 заједничку тачку ове две праве. Укупно оваквих тачака је 19. ♣

19. На правој p дато је седам различитих тачака: A, B, C, D, E, F, G. Колико дужи оне одређују?

Решење. Решимо овај задатак набрајањем дужи:
AB, AC, AD, AE, AF, AG,
BC, BD, BE, BF, BG,
CD, CE, CF, CG,
DE, DF, DG,
EF, EG,
FG.

Као што се види, дужи смо набројали поделивши их у редове, у зависности од слова која представљају њихове крајеве. Уколико постављате питање због чега нема, на пример, дужи FC? Заправо, она је ту! Јер, пазите: Дужи CF и FC су исте дужи и ми их зато набрајамо по само једном, зато је и у овом набрајању у сваком новом реду била по једна мање дуж. Дакле, наших тражених дужи је: $6+5+4+3+2+1 = 21$! ♣

20. Дате су паралелне праве p и q. Нека су на правој p дате тачке A, B и C а на правој q тачке D, E и F. Колико четвороуглова одређују ове тачке?

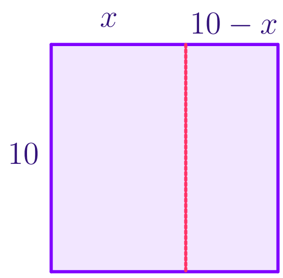
Решење. Четвороугао је одређен са четири тачке, од којих не постоје три колинеарне. Па, овде са једне праве бирамо две тачке и са друге бирамо две. Пошто са прве праве можемо три пута одабрати по две различите тачке (A и B, B и C, A и C), а исто тако и са друге праве (D и E, E и F, D и F), то једноставно закључујемо да ће постојати $3 \cdot 3 = 9$ различитих четвороуглова. ♣

21. Разлика два угла са паралелним крацима једнака је половини већег од њих. Одредити ове углове.

Решење. Углови са паралелним крацима могу бити или једнаки или суплементни. Ако би били једнаки онда би им разлика била 0, па искључујемо ту могућност. Дакле, суплементни су и нека су то, на пример, углови α и β, и важиће $\alpha + \beta = 180°$. Нека је угао α већи од њих, па због услова задатка биће и $\alpha - \beta = \frac{\alpha}{2}$. Одавде једноставно закључујемо да је $\beta = \frac{\alpha}{2}$. А отуда је и $\alpha = 120°$ и $\beta = 60°$. ♣

22. Квадрат чија је површина $1m^2$ подељен је на два правоугаоника чије се површине разликују за $40dm^2$. Колики су обими тих правоу-гаоника?

Решење. На следећој слици је приказана подела квадрата.



Уочавамо да на основу датих података важи:

$$10 \cdot x + 40 = 10 \cdot (10 - x)$$

$$10 \cdot x + 10 \cdot x = 100 + 40$$

$$20 \cdot x = 140$$

$$x = 7\ dm = 70\ cm$$

Па је сада једноставно израчунати обиме ових правоугаоника. Они износе 340 cm и 260 cm. ♣

5 Проблемски задаци

1. Марија је имала 3, а Петар 5 чоколада. Њих двоје, заједно са Јеленом, поделили су све чоколаде на равне делове. Јелена је дала 80 динара Марији и Петру и на тај начин платила свој део чоколада. Како ће Марија и Петар поделити 80 динара? (Општинско такмичење 2001.)

   Решење. Трећина чоколада кошта 80 динара, па све коштају 240 динара. Па, једна чоколада кошта 30 динара. Јасно је да је Марија уложила 90, а Петар 150 динара, па је Марија узела $90 - 80 = 10$ динара, а Петар $150 - 80 = 70$ динара. ♣

2. Две оловке и три свеске коштају 110 динара. Четири оловке и седам свезака коштају 250 динара. Израчунај цену осам оловака и осам свезака. (*Општинско такмичење 2013.*)

   Решење. Осам оловака и осам свезака коштају 320 динара. ♣

3. Бака Мица направи 25 медењака од 1 шоље меда, 2 шоље уља, 3 шоље шећера и 4 шоље брашна. Колико највише медењака бака Мица може да направи ако у кући има 13 шоља меда, 14 шоља уља, 15 шоља шећера и 16 шоља брашна? (*Школско такмичење 2008.*)

   Решење. Она може да направи 100 медењака. ♣

4. Деда је 2 пута јачи од бабе, баба је 3 пута јача од унуке, унука је 4 пута јача од Жуће, Жућа је 5 пута јачи од мачке, мачка је 6 пута јача од миша. Деда, баба, унука, Жућа, мачка и миш могу заједно да ишчупају репу, а деда, баба, унука, Жућа и мачка (без миша) не могу. Колико мишева треба позвати да би они сами могли да ишчупају репу? (*Општинско такмичење 2011.*)

   Решење. Треба позвати 1237 мишева. ♣

5. Које године је рођена особа која 2011. године пуни онолико година колики је збир цифара године њеног рођења? (*Општинско такмичење 2011.*)

   Решење. Особа је рођена 1991. године. ♣

6. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Колико највише предмета се може купити за 2005 динара? (*Општинско такмичење 2005.*)

   Решење. Пет оловака и пет свезака коштају 175 динара, а две оловке и две свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30, а оловке 5 динара. Највише предмета се може купити ако се купе само оловке, и то њих укупно 401. ♣

7. На математичкој конференцији било је укупно 504 учесника. Предавачи су били смештени у двокреветне, а остали учесници у трокреветне собе. Ако је заузето 113 трокреветних соба више него двокреветних, колико је на овој конференцији било предавача?

   Решење. У 113 соба смештено је укупно 339 учесника који нису предвачи. Преостало је још $2x$ соба, таквих да је у x њих смештено по 2 учесника - предавача, а у још x по 3 учесника. Како је 504-339=165, то је $x = 165 : 5 = 33$. Па закључујемо да је предавача било 66. ♣

8. Веверица је једног дана, за 7 сати појела укупно 127 лешника. Почела је у 8 сати ујутру и у сваком следећем сату јела је дупло више лешника него претходног сата. Колико је појела првог сата? Да је тако наставила, колико лешника би појела у осмом сату?

   Решење. Нека је у првом сату појела x лешника. То значи да је за 7 сати појела $x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x + 64x = 127x = 127$. Па, у првом сату је појела само 1 лешник. У осмом би појела још 128 лешника. ♣

9. У једној фабрици три радника за три дана припреме за извоз 3 тоне робе. Колико ће тона робе припремити девет радника за 6 дана?

   Решење. Један радник за три дана припреми 1 тону робе, па закључујемо да он за 6 дана припреми 2 тоне робе. Дакле, 9 радника ће за то време припремити 18 тона робе. ♣

10. На удаљености од 125 метара пас је запазио зеца и појурио за њим. Истог тренутка зец се дао у бег. Једним скоком зец прескаче пола метра, а пас два метра. Осим тога, у времену у ком зец скочи седам пута, пас скочи два пута. Колику удаљеност је претрчао пас од тренутка када је спазио зеца до тренутка када га је уловио? (*Општинско такмичење 1996.*)

    Решење. Док зец пређе $7 \cdot 50\ cm = 350\ cm$, пас пређе $2 \cdot 200\ cm = 400\ cm$, тако закључујемо да пас $50\ cm$ брже напредује од зеца. Он ће раздаљину од 125 метара надокнадити за $12500 : 50 = 250$ јединица времена. За то време од ће прећи $250 \cdot 4\ m = 1000\ m$. ♣

11. Када се Раша родио његова мајка је имала 25 година. Године 1992. мајка је била шест пута старија од Раше. Колико година сада има Раша, а колико његова мајка?

(*Општинско такмичење 1996.*)

Решење. Мајка је старија од Раше 25 година. 1992. године Раша је имао x година, а мајка $6x$ година. Из $6x - x = 25$ је $x = 5$. Па, 1992. године Раша је имао 5, његова мајка 30 година. Раша је рођен 1987. године. Сада, 2015. године, Раша има 28 година, а његова мајка 53 године. ♣

12. На левој обали реке налази се 6 војника и 2 дечака. Чамац може да повезе највише једниг војника или два дечака. Колико најмање пута чамац мора да пређе реку да би се сви превезли на десну обалу реке? (*Општинско такмичење 1988.*)

    Решење. Да би се један војник пребацио на другу обалу, потребна су 4 преласка реке. 1. Пређу два дечака; 2. Врати се дечак I; 3. Превезе се војник; 4. Врати се дечак II. За прелазак 6 војника потребно је 24 оваква преласка. Тада су ода дечака на левој обали и потребно је још једно прелажеље чамца због њих. Дакле, потребно је 25 прелажења реке. ♣

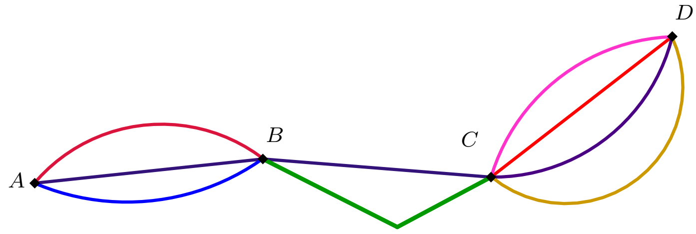
13. Ученик раполаже са 16 сламки дужине 1 cm, 6 сламки дужине 2 cm и 7 сламки дужине 3 cm. Може ли се од ових сламки конструисати правоугаоник, ако се све сламке морају употребити и ако се сламке не смеју ломити? (*Међуопштинско такмичење 1991.*)

    Решење. Обим овог правоугаоника би био $16 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 49$ cm. Па, ако су му a дужина и b ширина, због $2a + 2b = 49$ било би $a + b = 24,5$ cm, а то није могуће јер се сламке не смеју ломити. ♣

6 Пребројавања

1. Из града A у град B воде три пута, из града B у град C два пута и из C у D четири пута. На колико начина се може стићи:
а) из града A у град C идући кроз град B;
б) из града A у град D пролазећи кроз градове B и C и без враћања у град који је већ посећен?

Решење. На следећој илустрацији приказани су путеви који повезују ова четири града.



(а) Пошто се из града A може доћи до града B на 3 начина, и било којим од њих кренули, даље из B се може наставити ка граду C на 2 различита начина, то је укупно $3 \cdot 2 = 6$ начина да се дође из града A у град C.

(б) Како постоје 4 различита пута која воде од града C до града D то се од града A до града D може доћи на $6 \cdot 4 = 24$ различита начина. ■

2. Колико се различитих троцифрених бројева може написати цифрама: 1,2,3,4,5 ако се цифре:
а) могу понављати; б) не могу понављати?

Решење. Посматрајмо овај проблем тако што ћемо уочити три места за цифре и онда испитати на колико начина можемо поједина места попунити цифрама.

$$\underline{abc}$$

(а) На месту прве цифре може бити било која од 5 цифара. Такође, на месту друге цифре исто тако има 5 могућности, а исти је случај и са трећом цифром. Па једноставно добијамо да оваквих бројева има $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
(б) Прву цифру можемо изабрати на 5 начина, другу на 4 начина (јер не можемо изабрати број који је већ искоришћен за прву цифру) а трећу на 3 начина. Па оваквих бројева има $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. ■

3. Колико се различитих четвороцифрених бројева може написати ако се цифре:
а) могу понављати; б) не могу понављати?

Решење. Следећа таблица приказује одговарајућа решења и упоредни однос делова а) и б)

	ц. хиљ.	ц. сто.	ц. дес.	ц. јед.	укупно бројева
а)	9 мог.	10 мог.	10 мог.	10 мог.	$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$
б)	9 мог.	9 мог.	8 мог.	7 мог.	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

■

4. Потребно је направити значке у облику троугла, квадрата или круга, тако да на свакој значки буде написано слово ћирилице и једна цифра. Колико се таквих (различитих) значака може направити?

   Решење. С обзиром да постоји 3 различита облика, а да се на једној фигури исписије једно од 30 слова и једна од 10 цифра, онда се оваквих значака може направити $3 \cdot 30 \cdot 10 = 900$.■

5. Душан је на прославу рођендана позвао другове и другарице. Сви гости су се руковали са Душаном и међусобно. Један од гостију пребројао је руковања и утврдио да је било 120 руковања. Колико је гостију имао Душан?

   Решење. Нека је на Душановом рођендану било (заједно са њим) n људи. Свако од њих руковао се са $n-1$ других (само није са собом). Руковање између особа А и Б (без обзира да ли је особа А прва пришла особи Б или обрнуто) рачунамо као једно руковање. Дакле, било је укупно $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 120$ руковања. Одавде је $n \cdot (n-1) = 240$, односно $n = 16$, јер је $16 \cdot 15 = 240$. Дакле, на Душановом рођендану било је 15 гостију. ■

6. Колико се четвороцифрених бројева дељивих са 2 може написати тако да цифра хиљада буде прост број а цифра стотина непаран број?

   Решење. Траже се бројеви облика $\overline{abcp}$, где је цифра p паран број и може бити изабрана на 5 начина као једна од цифара из скупа $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Цифра хиљада a мора бити прост број, па може бити изабрана на 4 начина, као једна од цифара из скупа $\{2, 3, 5, 7\}$. Цифра стотина b може бити изабрана на 5 начина, као једна од цифара из скупа $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Цифра десетица се може без ограничења одабрати на 10 начина. Па, оваквих бројева има $4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 1000$. ■

7 Дирихлеов принцип

Ако се $n+1$ или више објеката смешта у n кутија,
тада бар у једној кутији постоји више од једног објекта.

На пример, ако пет голубова желимо сместити у четири кућице, мораће да постоји кућица у којој ће бити бар два голуба.

1. Доказати да у једном граду са више од 100.000 становника постоји група од најмање 274 људи која слави рођендан истог дана.

   Решење. Пошто година има највише 366 дана, то сваки од становника рођендан слави у једном од тих дана. С обзиром да је

   $$100.000 : 366 = 273(82)$$

   закључујемо да ако сваког дана рођендан слави 273 људи, постојаће и дан у коме их је више јер постоји још најмање 82 људи који неког дана морају славити рођендан. Па, по Дирихлеовом принципу, важи тврђење задатка. ♣

2. Имамо на располагању 50 корпи јабука. Свака корпа садржи највише 24 јабуке. Показати да постоје бар три корпе које садрже исти број јабука.

   Решење. Поједноставимо проблем користећи идеју да 50 корпи јабука посматрамо као голубове, а број јабука у корпи као кућице, то једноставно, због $50 : 24 = 2\frac{1}{12}$ долазимо до закључка да по Дирихлеовом принципу важи тврђење задатка. ♣

3. Петнаесторо деце добило је да подели 100 лешника. Доказати да постоји двоје деце која су добила исти број лешника.

   Решење. Претпоставимо да је свако дете добило различит број лешника. Пробајмо са поделом од 0 до 14 лешника. То би значило $0+1+2+\ldots+14 = 105$. Међутим ово је немогуће, јер је подељено мање од 105 лешника. Па мора посотојати двоје деце која су добила исти број лешника. ♣

4. У једној шуми расте милион стабала храста. Ако је познато да у овој шуми не постоји дрво без листова и дрво са више од 400 000 листова показати да постоје најмање три храста која имају исти број листова.

   Решење. Покушајмо овај проблем решити сликовито. Храстове можемо посматрати као голубове, а број листова на њима као кућице. Пошто је више голубова него кућица то закључујемо да по Дирихле-овом принципу важи тврђење задатка.

   Међутим, до решења можемо доћи и пешачки. Претпоставимо да не постоје три храста са истим бројем листова. То би значило да их је највише по два која имају исти број листова. Па кренимо редом, нека су два храста која имају по 1 лист, нека су два храста која имају по 2 листа, и тако даље, до 2 храста која имају по 400 000 листова. Па, овим површним рачунањем, набројасмо "само" 800 000 храстова, и остало нам је још њих 200 000. Па како не постоје храстови са више од 400 000 листова, то међу ових преосталих 200 000 мора постојати неки који има исти број листова као нека двуга два, и тако ће их бити три са тим својством. ♣

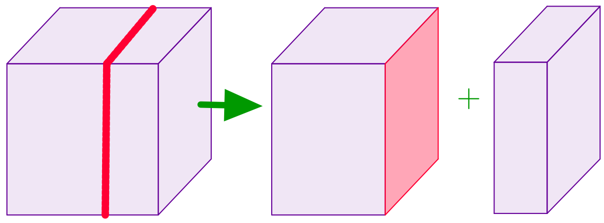
8 Коцка и квадар

1. Од 27 малих коцки ивице 1 cm направљена је већа коцка, а затим је са два њена ћошка склоњена по једна мала коцка. Колика је површина тако добијеног тела?

   Решење. Површина веће коцке је $6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = 54\ cm^2$. Када се на ћошку веће коцке одстрани мања коцка, уклањају се 3 мање стране - квадрата, ивице 1 cm, али се у новодобијеном телу стварају исте такве 3 нове стране које учествују у његовој површини. Па, уклањањем 2 мање коцке са кошкова, добија се тело које има исту површину као и првобитна коцка. ♣

2. Од 8 малих коцки ивице 1 cm направљена је већа коцка, а затим је она пресечена са равни која је паралелна двема њеним странама. Колики је збир површина та два добијена тела?

   Решење. Површина веће коцке је $6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2$. Када се ова коцка расече са равни паралелном двема њеним странама добијају се два квадра чији збир површина садржи све стране пређашње коцке и још 2 стране, настале сечењем.



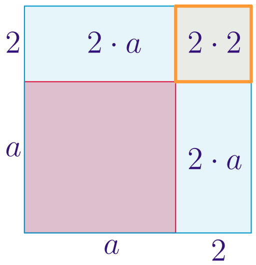
   Па је збир тих површина једнак $24\ cm^2 + 2 \cdot 2^2\ cm^2 = 32\ cm^2$ ♣

3. Коцка је, помоћу 15 равни паралелних једном пару страна коцке, подељена на 16, не обавезно једнаких квадара. Колико пута је укупна површина свих тих квадара већа од површине дате коцке? (*Општинско такмичење 2014.*)

   Решење. Шест пута. Користити решење претходног задатка. ♣

4. Ивица коцке је a. Када се ивица те коцке повећа за 2 cm површина тако добијене коцке је за 96 cm^2 већа од првобитне. Израчунај површину првобитне коцке. (*Општинско такмичење 2011.*)

   Решење. Пошто се површина коцке повећа за 96 cm^2, то се површина сваке стране за $96 : 6 = 16\ cm^2$.



Површина једне стране се повећа за 2 правоугаоника површине $2 \cdot a$ и за квадрат површине $2 \cdot 2$. Па из $2 \cdot a + 2 \cdot a + 4 = 16$ добијамо $a = 3\ cm$. Па је површина првобитне коцке једнака $6 \cdot 3^2 = 54\ cm^2$. ♣